On Walsh Fourier Series (Walsh Fourier 級数について)

著者	渡利 千波
号	40
発行年	1964
URL	http://hdl.handle.net/10097/23153

氏　名・(本籍)	渡利千波（わたりちなみ）
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第40号
学位授与年月日	昭和39年6月17日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
最終学歴	昭和30年3月 東北大学大学院理学研究科修士課程修了
学位論文題目	On Walsh Fourier Series (Walsh Fourier級数について)
論文審査委員	(主査) 教授 洲之内 源一郎　教授 淡中 忠郎 教授 佐々木 重夫 教授 深宮 政範

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

緒論

$\phi_0(x)=1 \quad x\in[0,\frac{1}{2}) \qquad =-1, (x\in[\frac{1}{2}, 1))$

$\phi_0(x+1)=\phi_0(x), \quad \phi_n(x)=\phi_0(2^n x)$

で定義される函数$\phi_n(x)$（$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$）をRademacherの函数という。これを用いて

$n=0$に対しては　$\psi_0(x)=1$

$n=2^{n(1)}+2^{n(2)}+\cdots\cdots\cdots+2^{n(r)}\geqq 1 \quad (n(1)>n(2)>\cdots\cdots>n(r)\geqq 0)$

に対しては，

$\psi_n(x)=\phi_{n(1)}(x)\ \phi_{n(2)}(x)\cdots\cdots\cdots\ \phi_{n(r)}(x)$

で定義される函数$\psi_n(x)$（$n=0, 1, 2, \cdots\cdots\cdots$）をWalshの函数と呼ぶ。$\{\psi_n(x)\}$が（0, 1）上の完全正規直交系を構成することは，より古くJ.L.Walsh（1923）によつて示されたが，この函数系を上のように定義したのはR.E.A.C.Paley（1932）である。PaleyはL^p（0, 1）（$p>1$）に属する函数のWalsh-Fourier級数（以下WFSと略記する）に対して，いわゆる分解定理を証明し，それにもとづいてL^p（$p>1$）に属する函数のWFSの理論を構成した。

またN.J.Fine（1949）は，Walshの函数$\psi_n(x)$は，いわゆる2進群（次数2の巡回群の可付番直積）Gの指標と考えられることを示し，WFSが通常のFourier級数（以下TFSと略記する）と類似の性質を持つ理由をあきらかにした。

著者はこれらの結果にもとづいて，WFSの新しい性質（TFSに対しては成立しないがWFSに対しては成立する命題，TFSに対しては既知であるがWFSに対しては未知である命題）のいくつかをあきらかにする。

第1章　Walsh多項式による最良近似

Walshの函数を2進群Gの指標とする。Gの元を$x=\{x(n)\}$，$x(n)=0, 1$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）Gにおける演算を$\dot{+}$で表わすと，つぎの定理が成立する。

定理　$\alpha>0$と$1\leqq p\leqq\infty$に対して，つぎの四命題は同値である。

(1)　$f(x)\in \mathrm{Lip}^{(p)}\,\alpha(W)$

(2)　$\omega^{(p)}(2^{-n};f)\equiv\inf\{\|f(x\dot{+}h)-f(x)\|_p;\ h(1)=\cdots\cdots=h(n)=0\}=O(2^{-n\alpha})$

(3)　$E_m^{(p)}(f)=O(m^{-\alpha})$

(4)　$\|f-s_{2^n}(x;f)\|_p=O(2^{-n\alpha})$

ここに$\omega^{(p)}$はL^p－ノルムに関するfの連続率，$E_m^{(p)}$はm次以下のWalsh多項式によるL^p－ノルムの意味でのfの最良近似，$s_k(x;f)$は$f(x)$のWFSの第k部分和である。

TFSの理論において類似の定理を述べるためには$1<p<\infty$，$0<\alpha<1$という制限が必要であるが，WFSの場合にはそのような制限が不要であることが知られる。この定理の系の一つに

系2　$\alpha>0$，$\beta>0$，$p\geqq 1$，$q\geqq 1$，$1/r\geqq(1/p)+(1/q)-1$であれば

$f\in\mathrm{Lip}^{(p)}\,\alpha(W)$，$g\in\mathrm{Lip}^{(q)}\,\beta(W)\longrightarrow f*g\in\mathrm{Lip}^{(r)}(\alpha+\beta)\,(W)$

がある。TFSの場合には$\alpha+\beta$が1よりも小であるか，$\mathrm{Lip}^{(p)}\,\alpha$の定義を高次の階差に修正したものを用いるかしなければ，同じ結果は成立しないことが知られている。

第2章　Walsh-Fourier級数のMultiplier Transformation

一つの函数を（端数次だけ）積分すると，その函数のTFSの動きが「正常化」されることは周知であるが，TFSの理論における（Weylの意味での）端数次積分が一種のmultiplier transformation

であることにヒントを得て，著者はTFSにある種のmultiplier transformationを定義し，その性質を考察した。今このmultiplier operatorを$I\alpha$であらわせば$I\alpha$はつぎの性質を有することが証明される。

定理1 (i) $I\alpha(I\beta(f))=I\alpha+\beta(f)$ $(f\in L^1, \alpha>0,\ \beta>0)$

(ii) $f\in \mathrm{Lip}^{(p)}\alpha\ (W)\Longrightarrow I\beta(f)\in \mathrm{Lip}^{(p)}(\alpha+\beta)\ (W)$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

(iii) fがn次以下のWalsh多項式であれば

$$\| I-\alpha(f)\|_p\leqq A\alpha\, n^{\alpha}\|f\|_p \qquad (\alpha>0)$$

(iv) $f\in L^p\ (1\leqq p<\infty)$, $\alpha>1/p$

$$\Longrightarrow I\alpha(f)\in \mathrm{lip}^{(\infty)}(\alpha-\frac{1}{p})(W)$$

定理2 $1<p<\infty$, $\alpha=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}>0$に対して$I\alpha$は強い$(p, q)$型の作用素である。

定理3 $0<\alpha<1$であれば$I\alpha$は弱い$(1, \frac{1}{1-\alpha})$型の作用素である。

この二定理の証明はやや複雑で，まず定理2を特殊なp，qに対して証明し，それを用いて定理3を証明し，さらにその結果を用いて定理2が一般のp，qに対して成立することを示す。方針としてはJ.MarcinkiewiczとA.Zygmundの方法に必要な修正を施して，それを用いればよい。

$f\in L^1$に対するI_1の効果を検討（定理4）したのち，random signを有するWFSとmultiplier transformationとの関係を考察する。TFSにおけるPaley-Zygmundの結果に相当するものが，WFSに対しても成立する（定理5）が「ほとんどすべての符号列」としてある絶対集合Eに属する符号列をとることができることを指摘する（定理5系）。この章の最後には，multiplier transformationの近似論への応用として，S.Yanoの結果の精密化が行われる。

第3章　Walsh-Fourier級数の平均収束

定理1 任意の自然数n，$f\in L^1$，$y>0$に対し

$$m(\{x;|s_n(x;f)|>y\})\leqq\frac{6}{y}\|f\|_1$$

が成立する。

この定理はTFSに対してはA.N.Kolmogoroffによつて得られていたが，彼は共役函数を用いてTFSの部分和を評価したので，その方法はWFSには適用できず，多くの人に予想はされながらも，上の定理1は証明されずに残されていた。著者はHörmander型の分解定理を用いて証明に成功した。定理1からは周知の論法でつぎの定理が導かれる。

定理2 (i) $f\in L^p\ (1<p<\infty)$であれば

$$\| s_n(x;f)\|_p\leqq A_p\|f\|_p$$

(ii) $|f|\log^+|f|\in L^1$であれば

$$\| s_n(x;f)\|_1\leqq A\int|f(x)|\log^+|f(x)|\,dx+A$$

定理3 $f\in L^1$であれば$0<\mu<1$に対し

$$\int|s_n(x;f)|^{\mu}dx^{1/\mu}\leqq A\mu\|f\|_1$$

定理1の証明の方法によれば，Paleyの理論の基本となつた分解定理も比較的容易に証明できる。（定理4）

第4章　Walsh-Fourier級数の絶対収束

複素変数の複素数値函数$T(z)$が不等式

$$|T(z_1)-T(z_2)|\leqq|z_1-z_2|$$

をみたすとき，Tは一つのcontractionであるという。contractionは一般には正則函数でないから，

$f(x)$のWFSあるいはTFSが絶対収束しても，$T(f(x))$ のWFSあるいはTFSは絶対収束するとはかぎらない。これに関して，R.P.Boasは次の問題を提出した。

問題　$\{\omega_n\}$は正数列で，$\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n<\infty$，および

$$(*)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\omega_k^2\right)^{1/2}+\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\omega_k^2\right)^{1/2}<\infty$$

が成立するものとする。$f(x)$のWFS $\sum c_n\psi_n(x)$が$|c_n|\leqq\omega_n$ $(n=1,2,\cdots\cdots\cdots)$をみたすとき，$T(f(x))$のWFSは絶対収束するか。

(*)のかわりに，より特殊な条件$\omega_n\geqq\omega_{n+1}$ を仮定してもよい。

著者はこの問題を，一般の条件(*)のもとに肯定的に解決した。証明の基礎になるのは，原点の近傍におけるWalshの函数の状態の考察（補助定理3）である。

第5章　拡張されたWalsh-Fourier級数

Walshの函数を指標とする2進群を有限次巡回群g_nの可付番直積でおきかえようという試みは，P.Levy，H.E.Chrestenson等によつて成されたが，Paleyの理論を再構成するには至つていなかつた。著者はこの章において

(1)巡回群g_nの次数が有界であれば，Paleyの分解定理およびそれから導かれる若干の定理（L^p($p>1$)に属する函数のWFSが平均収束すること，Hirschman 型の分解定理，L^2に属する函数のWFSの収束因子として$(\log n)^{-1/2}$ が採用できること等）を証明するとともに，(2)巡回群g_nの次数が有界でなければ，（拡張された形での）Paleyの分解定理が成立しないことを示した。

巡回群g_nの次数が有界でない場合，L^p（$p>1$）に属する函数のWFSが平均収束するかどうかは，$p=2$のtrivial caseを除いては未解決であり，（第3章の方法もこの場合には適用できない），今後の研究によつて新しい方法の発見されるのを待ちたい。

発　表　状　況

〔1〕 Best approximation by Walsh polynomials,
Tohoku Math. Journ., 15 (1963), 1 - 5.

〔2〕 Multipliers for Walsh Fourier series,
Tohoku Math. Journ., 16 (1964), 239 - 251.

〔3〕 Mean convergence of Walsh Fourier series,
Tohoku Math. Journ., 16 (1964), 183 - 188.

〔4〕 Absolute convergence of Walsh Fourier series (Contraction of Walsh Fourier series),
Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 189 - 192.

〔5〕 On Generalized Walsh Fourier series,
Tohoku Math. Journ., 10 (1958), 211 - 241.

論　文　審　査　要　旨

本論文はWalsh−Fourier 級数について研究したもので５章からなつている。Walsh 直交函数系が重要な性質を持つ函数系であることを1932年にPaleyが注目しその基本的諸性質を与えた。その後，Fine等によりこの函数系の群論的意義が指摘せられ幾多の興味ある結果が得られた。著者の研究はこれらを引継ぎさらに発展せしめたものである。

第１章ではWalsh多項式による近似について研究している。函数の連続率と最良近似の次数との間の完全な関係式を得たのは注目すべきである。第２章では Weyl の意味の分数次積分が，函数の三角フーリエ級数のmultiplier であることに着目してWalsh−Fourier 級数のある種のmultiplier を研究している。特にこれが分数次積分の性質をもつものを調べ，これを利用して函数の線形近似の問題を研究している。L^p（$p>1$）の函数については飽和近似と最良近似との関係について完全な結果を得た。第３章ではWalsh−Fourier 級数の平均収束を論じている。L^p（$p>1$）の函数のWalsh 展開がL^p−平均収束することは上述のPaleyの論文中最も重要な部分である。しかしその証明は非常に複雑であり，かつ$p=1$の場合等の critical case が分らない欠点がある。著者は$f(x)$のWalsh−Fourier級数の部分和を$s_n(x)$とする時，$s_n(x)$は$f\in L$の上の線形作用素として，弱い意味の（1，1）形であることを非常に簡単に証明している。これから上記Paleyの定理の証明はもとより，critical case の問題点，即ち$f\in L$の時，$f\in L\log^+L$の時の問題等も解決している。またこの方法で所謂Paleyの分解定理も簡潔に証明されることが指摘されている。第４章は絶対収束の問題で，三角函数系に対するBeurling の定理がそのまま成立することが示してある。最後の章ではWalsh函数系の群論的解釈による拡張を論じ，如何なる場合にPaleyの理論が構成できるかを調べている。特にPaleyの分解定理について詳しく研究し，これが成立する場合と成立しない場合とを完全に解決している。

以上を綜合して著者はWalsh函数系をとつて，特殊な位相群の上のフーリエ解析のモデルとしてその深い研究を行い，この方面の研究に重要な寄与をなしたものと考えられる。よつて渡利千波提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認める。